

## חדוֹא ב

פרק 10 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.

## כל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

---

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

### שאלות

(1) נתון :  $x = 2u - v$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $z = \ln(x^2 - y^2)$  :  
חשבו :  $z_u$ ,  $z_v$

(2) נתון :  $v = 4t + k$ ,  $u = t^2 + 4m$ ,  $z = e^{u-v}$  :  
חשבו :  $z_t$ ,  $z_m$ ,  $z_k$

(3) נתון :  $z = f(x^2 - y^2)$  :  
הוכחו :  $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

(4) נתון :  $z = f(xy)$  :  
הוכחו :  $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

(5) נתון :  $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$  :  
הוכחו :  $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

(6) נתון :  $z = f(x-y, y-x)$  :  
הוכחו :  $z_x + z_y = 0$

(7) נתון :  $w = f(x-y, y-z, z-x)$  :  
הוכחו :  $w_x + w_y + w_z = 0$

(8) נתון :  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$  :  
הוכחו :  $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

9) נתון:  $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

$$\text{הוכיחו: } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$$

10) נתון:  $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$$

11) נתון:  $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

$$\text{הוכיחו: } xu_x + yu_y + zu_z = 2u$$

12) נתון:  $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

$$\text{הוכיחו: } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$$

13) נתון:  $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{א.}$$

$$u_{xy} = u_{yx} \quad \text{ב.}$$

ג. חשבו את  $f'(0) = 2, g'(0) = 1$  אם ידוע ש-  $u_{xy}(1, \pi) = 1$ .

14) נתון:  $y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$

$$\text{א. הוכיחו: } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

ב. הוכיחו:  $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

$$\text{ג. הוכיחו: } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

**15)** נתון  $z = h(u, v)$ ,  $v = g(x, y)$ ,  $u = f(x, y)$  מקיימות את משווהת

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

הוכחו כי:

א.  $v$ ,  $u$  מקיימות את משווהת לפלאס.

$$\nu_{xx} + \nu_{yy} = 0, \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ וכן}$$

$$h_{xx} + h_{yy} = \left( (u_x)^2 + (\nu_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

**16)** נתון  $y = r \sinh s$ ,  $x = r \cosh s$ ,  $u = f(x, y)$ :

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

**17)** פונקציה  $f(x, y)$  תקרא הומוגנית מסדר  $n$ , אם

הוכחו כי אם  $f$  הומוגנית, אז:

$$x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$$

$$x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$$

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. חשבו את הנגזרות החלקיים של הפונקציה בנקודה  $(0, 0)$ .

$$\text{ב. נתון } x = 2t, y = t.$$

חשבו את  $(0)' z$  באופן ישר.

$$\text{ג. נתון } t = 2x, y = x.$$

חשבו את  $(0)' z$  לפי כל השרשרת.

ד. בעזרת תוכנת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

### תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

ג.  $-e$

$$\text{א. } f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad (18)$$

ב.  $\frac{4}{5}$

ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הם שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)